Grupa A

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 24.01.2013.

1. Riješiti matričnu jednačinu $-3X = 2AX + I$ ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.

(60%) (a) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{1 - ln\, x}{x^2}.$$

(40%) (b) Odrediti kosu asimptotu funkcije $y = \dfrac{3x^4 - x}{x^3 + 2}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

4. Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

Grupa B

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 24.01.2013.

1. Riješiti matričnu jednačinu $AX + I = -3X$ ako je $A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -13 \\ -6 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.

(60%) (a) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{1 + ln\, x}{ln\, x}.$$

(40%) (b) Odrediti kosu asimptotu funkcije $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $y = -x^2 - 4x$ i $y = x^2 + 2x$.

4. Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

Grupa C

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 24.01.2013.

1. Riješiti matričnu jednačinu $I + AX = -2X$ ako je $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 9 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.

(60%) (a) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije
$$y = \frac{2 + ln\, x}{6x^2}.$$
(40%) (b) Odrediti kosu asimptotu funkcije $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x - 2}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $x = y^2 - 1$ i $x = -y^2 - 2y + 3$.

4. Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

Grupa D

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno naspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Pismeni ispit iz predmeta **Matematika**, 24.01.2013.

1. Riješiti matričnu jednačinu $-2X = 3AX - I$ ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.

(60%) (a) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije
$$y = \frac{3 + ln\, x}{x}.$$
(40%) (b) Odrediti kosu asimptotu funkcije $y = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - x + 1}$.

3. Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $x = y^2 - 4y + 3$ i $x = -y^2 + 2y + 3$.

4. Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Riješiti matričnu jednačinu $-2X = 3AX - I$

ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rj. - upute

$$-2X = 3AX - I$$

$$-2X - 3AX = -I$$

$$(-2I - 3A)X = -I \quad / \cdot (-2I-3A)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (-1)(-2I-3A)^{-1}$$

$$-2I - 3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -12 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(-2I-3A) = 1$$

$$(-2I-3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

traženo rješenje

Riješiti matričnu jednačinu $-3X = 2AX + I$

ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj - upute

$$-3X = 2AX + I$$

$$-3X - 2AX = I$$

$$(-3I - 2A)X = I \quad / \cdot (-3I - 2A)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (-3I - 2A)^{-1}$$

$$-3I - 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(-3I - 2A) = -1$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Riješiti matričnu jednačinu $I + AX = -2X$

ako je $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 9 \\ -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rj. - upute

$$I + AX = -2X$$

$$AX + 2X = -I$$

$$(A+2I)X = -I \quad / \cdot (A+2I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (-1)(A+2I)^{-1}$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 9 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+2I) = 1$$

$$(A+2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Rijesiti matričnu jednačinu $AX + I = -3X$

ako je $A = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -13 \\ -6 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rj. -upute:

$$AX + I = -3X$$

$$AX + 3X = -I$$

$$(A+3I)X = -I \quad /(A+3I)^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = (A+3I)^{-1} \cdot (-I)$$

$$A+3I = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -13 \\ -6 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A+3I) = -1$$

$$(A+3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -8 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = \dfrac{2+\ln x}{6x^2}$.

Rj. - upute

D.p. $x > 0$

$x \in (0, +\infty)$

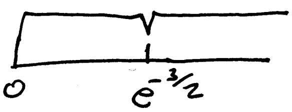
$$y' = -\frac{2\ln x + 3}{6x^3}$$

$y' = 0$ akko $2\ln x + 3 = 0$

$2\ln x = -3$

$\ln x = -\dfrac{3}{2}$

$x = e^{-\frac{3}{2}}$



prekidi y + nule y'

x	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$
y'	+	—
y	↗	↘
	MAX	

tabela rasta i opadanja

$$e^{-\frac{4}{2}} < e^{-\frac{3}{2}} < e$$

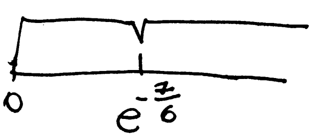
$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = \frac{2 - \frac{3}{2}}{6\cdot(e^{-\frac{3}{2}})^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{6e^{-3}}$$

$$MAX\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{1}{12e^{-3}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{e^3}{12}\right)$$

$$y'' = \frac{\ln x + \frac{7}{6}}{x^4}$$

$y'' = 0$ akko $\ln x + \dfrac{7}{6} = 0$

$\ln x = -\dfrac{7}{6} \Rightarrow x = e^{-\frac{7}{6}}$



$$e^{-\frac{9}{6}} < e^{-\frac{7}{6}} < e$$

x	$(0, e^{-\frac{7}{6}})$	$(e^{-\frac{7}{6}}, +\infty)$
y''	—	+
y	$\cap$	$\cup$
	P.T.	

tabela konveksnosti i konkavnosti

$$f(e^{-\frac{7}{6}}) = \frac{2 - \frac{7}{6}}{6(e^{-\frac{7}{6}})^2} = \frac{\frac{5}{6}}{6e^{-\frac{7}{3}}} = \frac{5}{36}e^{\frac{7}{3}}$$

$$P.T.\left(e^{-\frac{7}{6}}; \frac{5}{36}e^{\frac{7}{3}}\right)$$

(#) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $Y = \frac{1+\ln x}{\ln x}$

Rj: -upute:

D.p. $x>0$, $\ln x \neq 0$

$x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$Y' = -\frac{1}{x\ln^2 x}$$

Y' nema nule što znači da f-ja nema ekstrem

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Y'	$-$	$-$
Y	$\searrow$	$\searrow$

tabela rasta i opadanja

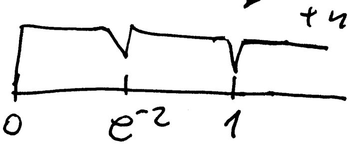
f-ja uvijek opada

$$Y'' = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$$

$Y''=0$ akko $\ln x + 2 = 0$

$\ln x = -2$

$x = e^{-2}$



x	$(0,e^{-2})$	$(e^{-2}, \underset{e^0}{1})$	$(1,+\infty)$
Y''	$+$	$-$	$+$
Y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

tabela konveksnosti i konkavnosti

P_0T_0

$$e^{-3} < e^{-2} < \underbrace{e^{-\frac{1}{2}}}_{\in(e^{-2},e^0)} < 1 < e$$

$$f(e^{-2}) = \frac{1-2}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$P_0T_0\left(e^{-2}, \frac{1}{2}\right)$$

(#) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = \dfrac{3+\ln x}{x}$.

Rj.-upute

D.p. $x>0$, $x \neq 0$

$x \in (0, \infty)$

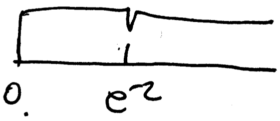
$$y' = -\frac{\ln x + 2}{x^2}$$

$y' = 0$ akko $\ln x + 2 = 0$

$\ln x = -2$

$x = e^{-2}$

prekidi y + nule y'



x	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, +\infty)$
y'	+	—
y	$\nearrow$	$\searrow$

MAX

tabela rasta i opadanja

$$f(e^{-2}) = \frac{3-2}{e^{-2}} = e^2$$

$MAX(e^{-2}; e^2)$

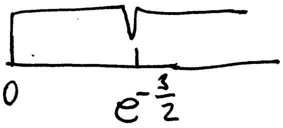
$$y'' = \frac{2\ln x + 3}{x^3}$$

$y'' = 0$ akko $2\ln x + 3 = 0$

$2\ln x = -3$

$\ln x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$

prekidi y + nule y'



x	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$
y''	—	+
y	$\cap$	$\cup$

P.T.

tabela konveksnosti i konkavnosti

$$f(e^{-\frac{3}{2}}) = \frac{3-\frac{3}{2}}{e^{-\frac{3}{2}}}$$

$P.T.\left(e^{-\frac{3}{2}}; \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$

(#) Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Rj. - upute

D.p. $x > 0$

$x \in (0, +\infty)$

$y' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

$y' = 0$ akko $2\ln x = 3$

$\ln x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

$0 \qquad e^{\frac{3}{2}}$ ← prekidi y + nule y'

x	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
y'	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\nearrow$

tabela rasta i opadanja

MAX

$f(e^{\frac{3}{2}}) = \dfrac{1 - \frac{3}{2}}{(e^{\frac{3}{2}})^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{e^3}$

$MAX\left(e^{\frac{3}{2}}; -\dfrac{1}{2e^3}\right)$

$y'' = -\dfrac{6\ln x - 11}{x^4}$

$y'' = 0$ akko $6\ln x - 11 = 0$

$\ln x = \dfrac{11}{6} \Rightarrow x = e^{\frac{11}{6}}$

$0 \qquad e^{\frac{11}{6}}$

x	$(0, e^{\frac{11}{6}})$	$(e^{\frac{11}{6}}, +\infty)$
y''	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$

tabela konveksnosti i konkavnosti

P.T.

$f(e^{\frac{11}{6}}) = \dfrac{1 - \frac{11}{6}}{(e^{\frac{11}{6}})^2} = \dfrac{-\frac{5}{6}}{e^{\frac{11}{3}}}$

$P.T.\left(e^{\frac{11}{6}}; -\dfrac{5}{6e^{11/3}}\right)$

Odrediti kosu asimptotu sljedećih f-ja

a) $y=\frac{x^4+1}{x^3-1}$ b) $y=\frac{2x^2-3x+4}{x-2}$

c) $y=\frac{3x^4-x}{x^3+2}$ d) $y=\frac{2x^3+4}{x^2-x+1}$

Rj. -upute:

Kosu asimptotu f-je $f(x)$ tražimo u obliku $y=kx+n$ gdje je

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

a) $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1\ /:x^4}{x^4-x\ /:x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^3}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1-x+}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^3-1}=0$$

$\Rightarrow$ $y=x$ je tražena kosa asimptota

b) $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4\ /:x^2}{x^2-2x\ /:x^2}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+4}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}-3x+4\cancel{-2x^2}+4x}{x-2}=1$$

$\Rightarrow$ $y=2x+1$ je tražena kosa asimptota

c) $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x}{x^4+2x}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4-x}{x^3+2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x-3x^4-6x}{x^3+2}=0$$

$\Rightarrow$ $y=3x$ je tražena K. A.

d) $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4}{x^3-x^2+x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+4}{x^2-x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^3}+4\cancel{-2x^3}+2x^2-2x}{x^2-x+1}=2$$

$\Rightarrow$ $y=2x+2$ je tražena kosa asimptota

(#) Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $y = -x^2 - 4x$ i $y = x^2 + 2x$.

Rj.:

Za parabolu $y = -x^2 - 4x$ znamo da je $\cap$ oblika. Vidimo da x-osu siječe u tačkama -4 i 0.

$y' = -2x - 4$

$-2x - 4 = 0$

$x = -2$

Tjeme ove parabole je $T(-2, 4)$

Za parabolu $y = x^2 + 2x$ znamo da je $\cup$ oblika. Vidimo da x-osu siječe u tačkama -2 i 0.

$y' = 2x + 2$

$2x + 2 = 0$

$x = -1$

Tjeme ove parabole je $T(-1, 1)$

Pronađimo još presječne tačke dvije date parabole.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 4x \\ y &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

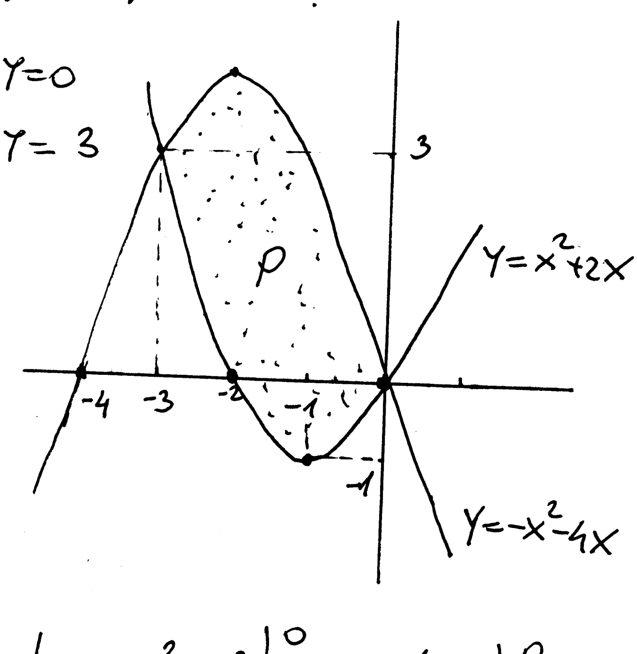
$$-2x^2 - 6x = 0 \quad /:(-2)$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = -3 \Rightarrow y = 3$



$$P = \int_{-3}^{0} \left[(-x^2 - 4x) - (x^2 + 2x)\right] dx = \int_{-3}^{0} (-2x^2 - 6x)\, dx = -\frac{2}{3}x^3 \Big|_{-3}^{0} - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-3}^{0} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(0 - (-27)\right) - 3(0 - 9) = -18 + 27 = 9$$ vrijednost tražene površine

Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $Y=4-x^2$ i $Y=x^2-2x$.

Rj.

$Y=4-x^2=-x^2+4$

za ovu parabolu znamo da je oblika $\frown$
vidimo da x-osu siječe u tačkama 2 i -2

$Y=x^2-2x$

je parabola $\cup$ oblika
x-osu siječe u tačkama 0 i 2.

Pronađimo još presječne tačke dvije date parabole

$$\begin{array}{rl} & Y=-x^2+4 \\ - & Y=x^2-2x \\ \hline & -2x^2+2x+4=0 \quad /:(-2) \end{array}$$

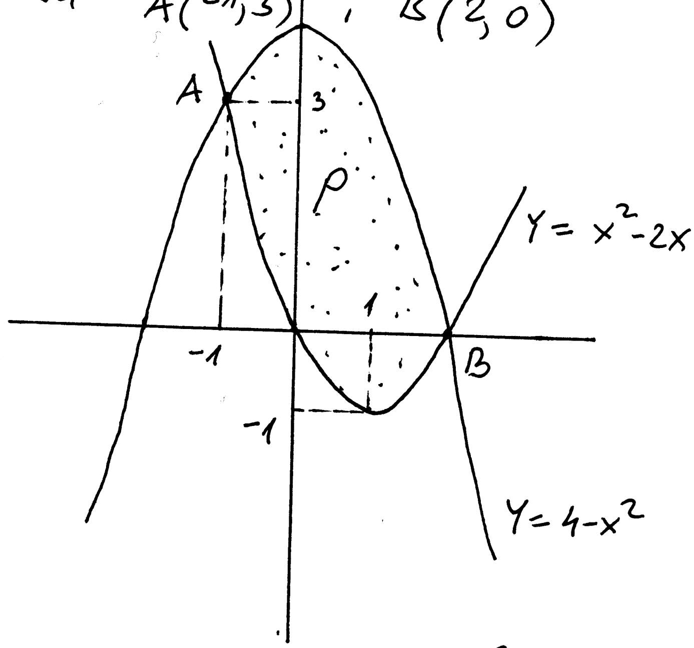
$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$x=-1 \Rightarrow Y=3$

$x=2 \Rightarrow Y=0$

Presječne tačke parabola su $A(-1,3)$ i $B(2,0)$



$$P=\int_{-1}^{2}\left[(4-x^2)-(x^2-2x)\right]dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}+2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}$$

$$+4x\Big|_{-1}^{2}=-\frac{2}{3}(8+1)+(4-1)+4(2+1)=-6+3+12=9$$

tražena površina

(#) Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena krivim linijama $x=y^2-1$ i $x=-y^2-2y+3$

Rj: Za krivu $x=y^2-1$ vidimo da je sljedećeg oblika $\subset$ y-osu sječe u tačkama -1 i 1

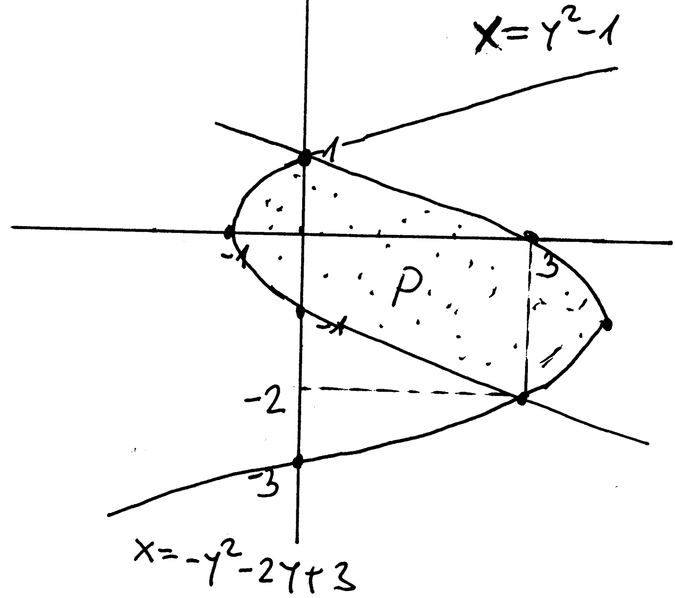
Kriva $x=-y^2-2y+3$ je oblika $\supset$. y-osu sječe u tačkama -3 i 1.

Pronađimo presječne tačke dvije date krive.

$$\begin{array}{l} x = y^2-1 \\ - \quad x=-y^2-2y+3 \\ \hline 2y^2+2y-4=0 \quad /:2 \\ y^2+y-2=0 \\ (y+2)(y-1)=0 \end{array}$$

$y=-2 \Rightarrow x=3$

$y=1 \Rightarrow x=0$



$$P=\int_{-2}^{1}\left[(-y^2-2y+3)-(y^2-1)\right]dy=$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2y^2-2y+4)\,dy=-\frac{2}{3}y^3\Big|_{-2}^{1}-y^2\Big|_{-2}^{1}+4y\Big|_{-2}^{1}=$$

$24\cdot 3= 7$

$$=-\frac{2}{3}(1-(-8))-(1-4)+4(1-(-2))=$$

$$=-6+3+12=9$$ tražena površina

(#) Izračunati površinu ravne figure koja je ograničena parabolama $x=y^2-4y+3$ i $x=-y^2+2y+3$.

Rj.

Parabola $x=y^2-4y+3$ je C oblika. $x=(y-3)(y-1)$

y-osu siječe u tačkama 1 i 3.

$x'=2y-4$

$2y-4=0$ $\qquad x=4-8+3=-1$ $\qquad$ Tjeme ove parabole je $T(-1,2)$

$y=2$

Parabola $x=-y^2+2y+2$ je Ɔ oblika. $x=-(y+1)(y-3)$

y-osu siječe u tačkama -1 i 3.

$x'=-2y+2$

$-2y+2=0$ $\qquad x=-1+2+3=4$ $\qquad$ Tjeme ove parabole je $T(4,1)$

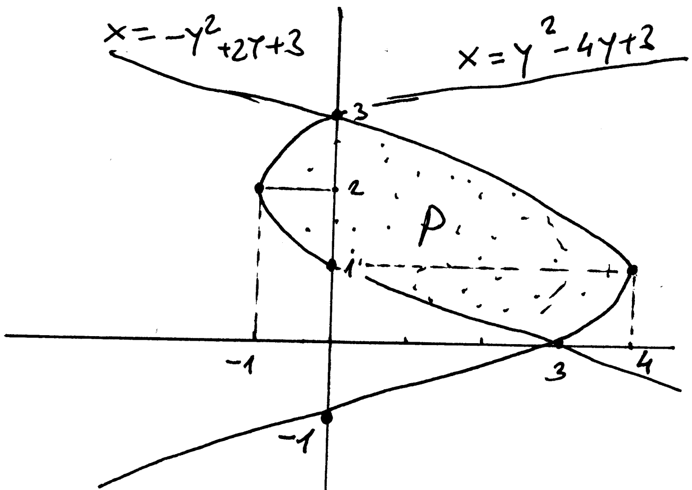
$y=1$

Pronađimo još presječne tačke dvije date parabole

$$
\begin{array}{r}
x=y^2-4y+3 \\
-\quad x=-y^2+2y+3 \\
\hline
2y^2-6y=0 \\
2y(y-3)=0
\end{array}
$$

$y=0 \Rightarrow x=3$

$y=3 \Rightarrow x=0$



$$P=\int_0^3\left[(-y^2+2y+3)-(y^2-4y+3)\right]dy=$$

$$=\int_0^3(-2y^2+6y)\,dy=-\frac{2}{3}y^3\Big|_0^3+6\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^3=$$

$$=-2\cdot 9+3\cdot 9=9$$ tražena površina

\# Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Rj:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix}$$

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

ovo je homogena diferencijalna jednačina $y' = f(\frac{y}{x})$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u$,

$y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u$$

$$u' = \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dx}x = \frac{1+\overbrace{u-u(1-u)}^{-u+u^2}}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \quad //\int$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|x| + \ln C$$

$$1+u^2 = 1+\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln|xC| + \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

(#) Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine
$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2 .$$

Rj.
$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2$ ovo je homogena diferencijalna jednačina $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u$,
$y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$y' = u^2 - 2$$
$$u'x + u = u^2 - 2$$
$$u'x = u^2 - u - 2$$
$$u' = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u - 2}{x}$$
$$\frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x}$$
$$u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1)$$
$$\frac{1}{(u-2)(u+1)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+1}$$
$$1 = A(u+1) + B(u-2)$$
$$A + B = 0$$
$$- \quad A - 2B = 1$$
$$3B = -1$$
$$B = \frac{-1}{3} \qquad A = \frac{1}{3}$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u-2} - \frac{\frac{1}{3}}{u+1} \right) du = \int \frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{3} \ln|u-2| - \frac{1}{3} \ln|u+1| = \ln|x| + \ln C_1$$
$$\ln \frac{\sqrt[3]{|u-2|}}{\sqrt[3]{|u+1|}} = \ln |x| C_1$$
$$\frac{\sqrt[3]{|u-2|}}{\sqrt[3]{|u+1|}} = |x| C_1$$
$$\frac{u-2}{u+1} = x^3 C$$
vratimo smjenu $\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1} = x^3 C$
$$\frac{y - 2x}{y + x} = x^3 C$$
$y - 2x = Cx^3(y + x)$ opšte rješenje diferencijalne jednačine

(#) Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine

$$x\,dy - y\,dx = y\,dy.$$

Rj.

$$x\,dy - y\,dx = y\,dy \quad /: dx$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$xy' - yy' = y$$

$$(x-y)y' = y$$

$$y' = \frac{y}{x-y} \begin{matrix} /:x \\ /:x \end{matrix}$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

ovo je homogena diferencijalna jednačina $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u \Rightarrow$

$y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{u}{1-u}$$

$$u'x = \frac{u}{1-u} - u$$

$$u' = \frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dx}x = \frac{\frac{u-u+u^2}{u-u(1-u)}}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^2}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{u^2}du = \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^{-1}}{-1} - \ln u = \ln|x| + c_1$$

$$-\frac{1}{u} - \ln u = \ln|x| + c_1$$

vratimo smjenu $u = \frac{y}{x}$

$$-\frac{1}{\frac{y}{x}} - \ln\frac{|y|}{|x|} = \ln x + c_1$$

$$-\frac{x}{y} - \ln|y| + \ln|x| = \ln|x| + c_1 \quad /\cdot(-1)$$

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c$$

je opšte rješenje date diferencijalne jednačine

(#) Odrediti opšte rješenje date diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Rj.

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad \begin{matrix} /:x^2 \\ /:x^2 \end{matrix}$$

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ovo je homogena diferencijalna jednačina $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, uvodimo smjenu $\frac{y}{x} = u$,

$y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u$$

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u - \overbrace{u(1-u^2)}^{-u+u^3}}{1-u^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1-u^2}{u+u^3}\,du = \frac{dx}{x} \quad \Big/ \int$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} \quad /\cdot u(1+u^2)$$

$$1-u^2 = A + Au^2 + Bu^2 + Cu$$

$$A + B = -1 \Rightarrow B = -2$$

$$C = 0$$

$$A = 1$$

$$\int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u} - \int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| - \ln|1+u^2| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

$$\ln\frac{u}{1+u^2} = \ln xC_1$$

$$\frac{u}{1+u^2} = xC_1$$

ako vratimo smjenu $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = xC_1$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = xC_1$$

$$\frac{y}{x^2+y^2}\cdot x = xC_1 \quad /:C_1 : x \quad /\cdot(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2 = Cy$$ opšte rješenje diferencijalne jednačine